

Corrigé du CNC 2012 : Physique 2

1^{er} Problème : Champ magnétique et induction

1 Partie1 : Magnétostatique dans le vide

1.1 Équation de MAXWELL

1.1.1 Les équation de MAXWELL :

$$\sqrt{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}} ; \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} ; \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M, t) = 0 ; \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t}$$

1.1.2 Les équations MAXWELL en régime stationnaire :

$$\sqrt{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}} ; \vec{\nabla} \wedge \vec{E}(M) = 0 ; \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(M) = 0 ; \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

1.2 Loi de Biot et Savart

1.2.1

√ Expression de \vec{B} une distribution volumique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_D \frac{\vec{j}(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau(P)$$

√ Expression de \vec{B} une distribution linéique :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{I d\vec{l}_P \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

1.2.2 Direction du champ B pour un plan de symétrie P :

√ Le champ \vec{B} est \perp au plan de symétrie : $\vec{B}(M) \perp (P)$

1.2.3 Direction du champ B pour un plan d'anti-symétrie P :

√ Le champ \vec{B} est \in dans le plan d'anti-symétrie : $\vec{B}(M) \in (P)$

1.3 Flux du champ magnétique

1.3.1 Propriété fondamentale du flux :

✓ Le flux du champ magnétique \vec{B} est **conservatif**.

✓ Expression intégrale de la conservation du flux :

$$\oint_{\Sigma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) = 0$$

1.3.2

✓ Dédurre une relation de passage :

On applique la conservation du flux à un cylindre de bases dS_1 et dS_2 ($= dS_1$) et de hauteur h ($\Sigma = dS_1 \cup dS_{lat} \cup dS_2$).

$$\int_{dS_1} \vec{B}_1(M_1) \cdot d\vec{S}_1 + \int_{dS_{lat}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) + \int_{dS_2} \vec{B}_2(M_2) \cdot d\vec{S}_2 = 0$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, alors : $\int_{dS_{lat}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}(M) \rightarrow 0$ et $M_1 \equiv M_2 \equiv M + -d\vec{S}_1 = d\vec{S}_2 = dS \vec{n}_{12}$, on trouve : **$B_{2n} = B_{1n}$**

1.3.3

✓ **Non**, il n'y a pas de monopole magnétique.

✓ Les lignes de champ du champ magnétique sont **fermées**.

1.4 Circulation du champ magnétique

1.4.1 Théorème d'Ampère :

✓ Établissement du théorème d'Ampère :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M) \Rightarrow \iint_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} \text{ (STOCKES)} :$$

\Rightarrow

$$\oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{\Sigma(\Gamma)} \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \mu_0 I_{enl\Gamma}$$

✓ Cette formule reste valable dans l'ARQS. Mais pas en régime hautement variable.

1.4.2

✓ Établissement du seconde relation de passage :

Théorème d'Ampère pour un contour ABCDA ($AB = CD = dl$ et $BC = DA = h$) : $\oint_{AB\overline{C}D\overline{A}} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enl}$.

Lorsque $h \rightarrow 0$, alors : $\int_{BC} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} \rightarrow 0$, $\int_{DA} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} \rightarrow 0$ et $M_1 \equiv M_2 \equiv M$; $-\overline{AB} = \overline{CD} = dl \vec{t}$ où \vec{t} est un vecteur unitaire tangent à la surface en M, il vient :

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$$

1.5 Champ et potentiel d'un dipôle magnétique

1.5.1

✓ Relation entre potentiel-vecteur et le champ magnétique : $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$

1.5.2

✓ Expression du champ \vec{B} en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \begin{pmatrix} \frac{3rz}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} \\ 0 \\ \frac{2z^2-r^2}{(z^2+r^2)^{\frac{5}{2}}} \end{pmatrix}$$

2 Partie 2 : Chute d'un aimant dans un cylindre métallique

2.1 Courant induit dans le conducteur

✓ Expression de \vec{A} dans le conducteur :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi} \frac{a}{[a^2 + (z - z_A)^2]^{3/2}} \vec{u}_\theta$$

✓ $Mq \vec{A}$ dépend du temps :

Puisque l'aimant est en chute, alors $z_A = z_A(t)$ d'où $\vec{A} = \vec{A}(M, t)$.

2.1.1

✓ Expression du champ électrique induit \vec{E} : $\vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{A}(M, t)}{\partial t}$, soit :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{3\mu_0 \mathcal{M} a}{4\pi} \frac{z - z_A}{[a^2 + (z - z_A)^2]^{\frac{5}{2}}} v \vec{u}_\theta$$

2.1.2

✓ Expression du courant induit \vec{j} : $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (Loi d'Ohm), soit :

$$\vec{j} = -v \frac{3\mu_0 \mathcal{M} a \sigma}{4\pi} \frac{z - z_A}{[a^2 + (z - z_A)^2]^{\frac{5}{2}}} v \vec{u}_\theta$$

2.2 Force exercée sur l'aimant

2.2.1

✓ Expression de la force élémentaire : $d^2 \vec{F}$ exercée sur $dV = ead\theta dz$:

* La force de LAPLACE (force magnétique) exercé par l'aimant sur le conducteur est : $d^2 \vec{F}' = \vec{j} dV \wedge \vec{B}$.

*D'après le principe de l'action et de la réaction, la force exercée sur l'aimant est : $d^2 \vec{F} = - d^2 \vec{F}'$. Soit :

$$d^2 \vec{F} = -\frac{3\mu_0^2 \mathcal{M}^2 a \sigma}{(4\pi)^2} dV \begin{vmatrix} -\frac{(2(z-z_A)^2 - a^2)(z-z_A)}{[(z-z_A)^2 + a^2]^5} \\ 0 \\ \frac{3a(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2 + a^2]^5} \end{vmatrix}$$

✓ Expression de dF_z exercé par un couronne dz :

$$dF_z = \int_{\theta=0}^{2\pi} d^2 \vec{F} \cdot \vec{u}_z = -v \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 a^3 \sigma e}{8\pi} \frac{(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2 + a^2]^5} dz$$

2.2.2

✓ Détermination de la force de freinage \vec{F} (selon Oz) exercée sur l'aimant : On a $\vec{F} = F_z \vec{u}_z$, avec :

$$F_z = -v \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 a^3 \sigma e}{8\pi} \int_{z=0}^L \frac{(z-z_A)^2}{[(z-z_A)^2 + a^2]^5} dz = -\alpha v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\alpha \vec{v}}$$

$$\alpha = \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 \sigma e}{8\pi a^4} \int_{-\frac{z_A}{a}}^L \frac{x^2}{(1+x^2)^5} dx$$

✓ La valeur approchée de α :

On a $L \gg a$ et si $z_A \gg a$ alors : $\alpha \simeq \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 \sigma e}{8\pi a^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^5} dx = \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 \sigma e}{8\pi a^4} I$

$$\alpha \simeq \frac{9\mu_0^2 \mathcal{M}^2 \sigma e}{8\pi a^4} I = \frac{45\mu_0^2 \mathcal{M}^2 \sigma e}{1024a^4}$$

2.2.3

✓ Application numérique :

$$\alpha = 0,145 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 0,15 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

2.3 Mouvement de chute de l'aimant

2.3.1

✓ Écrire l'équation différentielle du mouvement :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dz}{dt} = g \quad (\tau = \frac{m}{\alpha})$$

✓ Expression de la vitesse v :

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \tau g \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

✓ Expression de la position $z_A(t)$:

$$z_A(t) = g\tau^2 \left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right) + \tau g t$$

2.3.2

✓ Vitesse limite : Lorsque $t \gg \tau$ on atteint le régime permanent : $v = v_l = \text{cte}$ (vitesse limite).

✓ Expression de la vitesse limite :

$$v_l = \frac{mg}{\alpha} = g\tau$$

✓ Expression de la constante du temps :

$$\tau = \frac{m}{\alpha}$$

2.3.3

✓ Applications numériques :

$$v_l = 0,13 \text{ m.s}^{-1} \quad ; \quad \tau = 13,3 \text{ ms} \quad ; \quad z_A(\tau) = 0,64 \text{ mm}$$

✓ *Commentaire* : le temps caractéristique du régime transitoire τ est très faible, on peut négliger la durée de ce régime.

2.3.4

✓ Temps total de chute T de l'aimant : On a $v(t) \simeq v_l$, donc : $T = \frac{L}{v_l} = 11,5 \text{ s}$

✓ Temps de chute libre (dans l'air) T' : $T' = \sqrt{\frac{2L}{g}} = 0,55 \text{ s}$

✓ *Commentaire* : $T' \ll T$, l'amortissement par induction est plus important l'amortissement par les frottements de l'air.

2.3.5

✓ Ce système peut être utilisé comme amortisseur électromagnétique.

2^{ème} Problème : Étude d'un moteur thermique

1 Partie 1 : Généralités sur les moteurs thermiques

1.1

✓ *Impossibilité d'un moteur monotherme :*

Considérons une machine monotherme (i.e. en contact avec une seule source (T_0). Alors :

- Premier principe : $\Delta U_{cycle} = 0 = W + Q \Rightarrow W = -Q$.
- Deuxième principe : $\Delta S_{cycle} = 0 = \frac{Q}{T_0} + S^c \Rightarrow Q = -T_0 S^c < 0 \Rightarrow W > 0$: c'est donc un récepteur (pas moteur).

1.2

1.2.1

✓ *Sens des transferts thermiques :*

Un moteur :

- reçoit l'énergie thermique de la source chaude (Q_1 est reçue).
- cède l'énergie thermique à la source froide (Q_2 est cédée).

✓ *Signes des énergies thermiques :*

- $Q_1 > 0$ car elle est reçue par le moteur
- $Q_2 < 0$ car elle est cédée par le moteur

1.2.2

✓ *Condition du rendement maximale :* les transformations sont **réversibles**.

✓ *Définition du rendement :* Le rendement est défini par : $\eta = \frac{-W}{Q_1}$

✓ *L'expression de η_{\max} pour le cycle réversible :* $\eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

1.3 Cycle réel

1.3.1

✓ *Expression de l'entropie créée S_c ($\Delta S_{cycle} = 0$) :* $S_c = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}$

1.3.2

✓ *L'expression du rendement η' pour le cycle réel :* $\eta' = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2}{Q_1} S_c$

✓ *Commentaire :* Puisque $S_c > 0$ et $Q_1 > 0$, le rendement du cycle réel est inférieur à celui du cycle réversible ($\eta' < \eta_{\max}$).

2 Partie 2 : Moteur à combustion interne

2.1 Cycle réversible

2.1.1

✓ Calcul du nombre de moles initiales n_A : $n_A = \frac{P_A V_A}{R T_A} = 0,02 \text{ mol.L}^{-1}$ (GP)

2.1.2

✓ Relation entre T_A et T_B : La transformation "A→Bs" est ad. rév. ⇒ $T_A V_A^{\gamma-1} = T_{Bs} V_B^{\gamma-1}$ ($V_B = V_{Bs}$).

✓ Expression de T_{Bs} : $T_{Bs} = T_A r^{\gamma-1}$ ($r = \frac{V_A}{V_B}$)

2.1.3

✓ Valeur de r_{\max} pour éviter l'autoallumage (ie : $T_{Bs} < T' = 603 \text{ K}$) : $r < \left(\frac{T'}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = r_{\max} = 5,7$

2.2 Cycle réel :

2.2.1

✓ Montrer l'égalité ? :

Les transformations A→Bs et C→Ds sont **adiabatiques réversibles** donc :

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_{Bs} V_{Bs}^{\gamma-1} \quad \text{et} \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_{Ds} V_{Ds}^{\gamma-1}$$

puisque : $V_C = V_B = V_{Bs}$ et $V_A = V_D = V_{Ds}$, en multipliant les deux équations on trouve : $T_A T_C = T_{Bs} T_{Ds}$

2.2.2

✓ Montrer l'expression de T_B :

On a :

$$\eta_c = \frac{T_{Bs} - T_A}{T_B - T_A} \Rightarrow T_B = T_A + \frac{T_{Bs} - T_A}{\eta_c} ; \quad (T_{Bs} = T_A r^{\gamma-1}) \Rightarrow T_B = T_A \left[1 + \frac{1}{\eta_c} (r^{\gamma-1} - 1) \right]$$

2.2.3

2.2.3.1

✓ Expression de Q_{BC} de la transformation isochore B→C :

Loi de Joule + 1er principe ⇒ $n_A C_v (T_C - T_B) = \Delta U = Q_{BC}$; ($W_e = 0$) ⇒ $Q_{BC} = n_A C_v (T_C - T_B)$

2.2.3.2

✓ Montrer l'expression de T_C :

Les fuites thermiques sont négligeables ($Q_e = 0$) donc : $Q_{BC} = \underbrace{Q_e}_{=0} + n\mathcal{P}_{cal}$, d'où : $T_C = T_B + \frac{n\mathcal{P}_{cal}}{n_A C_v}$

2.2.4

✓ Montrer l'expression de T_D :

On a : $\eta_d = \frac{T_D - T_C}{T_{Ds} - T_C} \Rightarrow T_D = T_C + \eta_d T_{Ds} - \eta_d T_C$; avec $T_{Ds} = T_C T_A / T_{Bs} = T_C / r^{\gamma-1}$ (d'après 2.1.2 et 2.2.1).
d'où :

$$T_D = T_C \left[1 + \eta_d \left(\frac{1}{r^{\gamma-1}} - 1 \right) \right]$$

2.2.5 Application numérique :

On a : $T_A = 300$ K ; $\gamma = 1,4$; $C_v = \frac{R}{\gamma-1} = 20,7$ J/mol/K ; $\eta_c = \eta_d = 0,95$ et $r = 5$. D'où :

$$T_B = 585 \text{ K} \quad ; \quad T_C = 1425 \text{ K} \quad ; \quad T_D = 782 \text{ K}$$

2.2.6

✓ Calcul de la pression P_C : On a un GP, donc : $P_C = n_A R T_C / V_C = \frac{n_A R}{V_A} r T_C$; ($V_C = V_A / r$) $\Rightarrow P_C = 23,7$ bar

✓ $P_C < 50$ bar : la contrainte est bien respectée.

2.3 Effet des frottements :

2.3.1

✓ Expression de la puissance instantanée des frottements : $p(t) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\mu v^2$

2.3.2

✓ Expression de la vitesse moyenne : $v_m = 4NL$ (Le cylindre parcourt la distance $4L$ par cycle)

2.3.3

✓ Expression de la puissance moyenne \mathcal{P}_f des frottements : $\mathcal{P}_f = -16\mu(NL)^2$

2.4 Puissance mécanique utile

2.4.1

2.4.1.1

✓ Expression de Q_{DA} de la transformation isochore $D \rightarrow A$:

Loi de Joule + 1er principe $\Rightarrow n_A C_v (T_A - T_D) = \Delta U = Q_{DA}$; ($W_e = 0$) \Rightarrow $Q_{DA} = n_A C_v (T_A - T_D)$

2.4.2

✓ Expression du travail total W échangé par le fluide au cours d'un cycle :

Le 1er principe : $\Delta U_{cycle} = 0 = W + Q_{BC} + Q_{DA}$ d'où : $W = -n_A C_v (T_C - T_B + T_A - T_D)$

2.4.3

✓ Montrer l'expression de la puissance mécanique \mathcal{P}_m du moteur :

La puissance mécanique du moteur = La puissance recue du fluide ($-NW$) + la puissance perdue par les frottements, pendant N cycles \Rightarrow

$$\mathcal{P}_m = -NW + \mathcal{P}_f \Rightarrow \mathcal{P}_m = N n_A C_v (T_C - T_B + T_A - T_D) - 16\mu(NL)^2$$

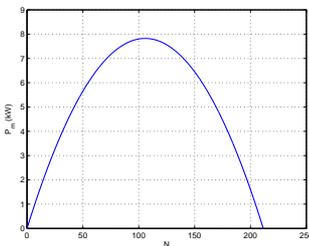
2.4.4

✓ Définition du rendement thermique η : $\eta = \frac{\mathcal{P}_m}{NQ_{BC}}$

✓ Expression de η : $\eta = 1 + \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} - 16N \frac{\mu L^2}{n_A C_v (T_C - T_B)}$

2.5 Effet de N

2.5.1 Allure de $\mathcal{P}_m = 148N - 0.7N^2$



2.5.2

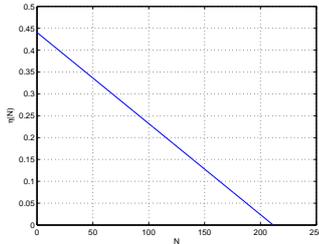
✓ Expression de $N_{max} = N_M$: $\frac{d\mathcal{P}_m}{dN} = 0 \Rightarrow N_M = \frac{n_A C_v (T_C - T_B + T_A - T_D)}{32\mu L^2}$

✓ Application numériques :

$$\boxed{N_M = 105} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{P}_m = 7,8 \text{ kW}}$$

2.5.3

✓ Allure de $\eta(N) = 0.44 - 2.10^{-3}N$:



✓ Valeur numérique de $\eta(N_M)$: $\boxed{\eta(N_M) = 0,23}$

✓ *Commentaire* : Le rendement est faible alors que la puissance développée est maximale.